

# CTMC-DTMC 간 관계와 Agent-Based M&S를 활용한 Capacity Pooling 모형에 관한 연구

양소연\* · 윤봉규\*\*  
(국방대학교 운영분석학과)

## An Analysis on the Model of Capacity Pooling Using Agent-Based M&S with a Relationship between CTMC and DTMC

SoYeon Yang\* · BongKyoo Yoon\*\*  
(Department of Operation Research, Korea National Defense University)

### Abstract

Capacity Pooling은 설비 공유로 수요를 통합 처리함으로써 SCM 환경의 불확실성에 능동적으로 대응할 수 있는 중요한 전략이다. 기존의 연구는 대기이론의 수치해석적 방법을 통하여 Capacity Pooling의 효과를 검증하였다. 그러나 수치해석적 방법은 다양한 생산환경의 조건을 반영하기 쉽지 않으므로 복잡한 현실 상황을 분석하기 어려운 한계가 있다. Agent-based M&S은 서버 수 증가, 비대칭 설비, 도착 및 서비스 분포 확장, 게임 상황 등 Capacity Pooling의 현실적인 행태를 적절하게 표현할 수 있다. 본 연구에서는 M/M/1/K 시스템 모형의 시뮬레이션을 통해 Capacity Pooling의 모델링을 수립할 수 있는 방안을 제시한다. 연구에 사용된 모형은 CTMC와 DTMC의 관계를 이용하여 이산시간 시뮬레이션을 수행할 수 있는 근거를 도출하였으며, Analytic 모델의 수치해석적 결과와 RNetlogo를 활용한 시뮬레이션 결과를 비교하여 타당성을 입증한다. 본 연구에서 제시한 모형은 생산관리분야에서 효과적인 공급사슬의 구축 및 유연생산 등의 목적으로 활용이 가능할 것으로 예상된다.

**Keywords:** Capacity Pooling, 연속시간 마코프체인과 이산시간 마코프체인의 관계, 에이전트 기반 모델링

## 1. 서론

### 1.1 연구배경 및 목적

Capacity Pooling은 유휴 상태의 자원을 이용하여 파잉수요를 충족시키는 유연생산 방식의 일종이다. Cachon(2018) 두 개 이상의 독립된 시스템의 자원을

공유함으로써 각 시스템 간 업무량의 불균형을 제거하여 전체적인 효율성을 증대시키는 방안이므로 불확실성이 높은 SCM 환경에서 생산자가 상황에 맞게 능동적으로 대응할 수 있는 중요한 전략이다. 대표적으로 설비 및 장비에 대한 초기 투자 비용이 많이 드는 방위산업, 건축, 의료, 통신 등의 분야에서 풀링을 통해 생산능력의 이용률을 높여 그 가치를 극대화할 수 있으며

논문접수일: 20xx. xx. xx

게재확정일: 20xx. xx. xx

\* 주저자: [poreover@gmail.com](mailto:poreover@gmail.com)

\*\* 교신저자: [bkyoon1@gmail.com](mailto:bkyoon1@gmail.com)

지역적·계절적 수요 편차가 큰 물류 및 운송 분야의 경우에도 설비를 공유함으로써 유휴 설비를 최소화하고 비용을 절감한다. 공유경제 및 플랫폼 사업의 경우에도 스몰비즈니스들 간의 시·공간적 제약상황에 따라 풀링 원리가 작용한다. 더욱이 시장참여자의 행태주의적 요소들 또한 시스템의 성능을 좌우할 수 있다. 이와 같이 다양한 분야에서 풀링을 적용하고 있으며 그 가치를 논의하려면 풀링이 발생할 수 있는 다양한 환경을 고려할 수밖에 없게 되었다.

본 연구에서는 불확실성을 야기하는 다양한 상황과 조건들을 모형화하기 위해 연속시간 마코프체인의 수치해석적 방법을 이산시간 마코프체인으로 변환하고 그 결과를 근거로 이산사건 시뮬레이션을 모델링하는 방안을 제시한다.

차건호, 윤봉규(2008)는 대기행렬 이론을 활용해 풀링의 분석적 효과를 제시했지만 재고모형의 부분풀링 효과만을 다루었고 배태호, 윤봉규(2008)는 출생사멸과정을 이용해 풀링 시스템을 모델링하여 완전풀링 및 부분풀링의 효과를 검증하였으나 그 외의 요소는 고려하지 못하였다. 남윤진, 윤봉규(2012)는 게임상황 하에서 풀링 행위자간의 전략적 의사결정에 대해 연구하였으나 수치해석적 방법의 한계로 현실적 요소를 고려한 모델의 확장이 어려웠다.

이에 따라 본 연구에서는 행태주의적 요소를 가미한 M/M/1/K 시스템의 기본적인 풀링 모형을 수립하고 풀링 상황을 현실적으로 구현하기 위한 Agent-Based M&S를 실시하고자 한다. 이를 위해 연속시간 마코프체인과 이산시간 마코프체인의 관계를 규명하여 연속시간 수치해석적 모형을 이산시간 시뮬레이션 모형으로 표현할 수 있는 근거를 확인하고 수치해석적 모형을 시뮬레이션 모형으로 타당성을 검증한다.

## II. M/M/1/K 시스템 간 풀링 모형

### 2.1 모형 수립시 가정사항

본 연구에서는 모형을 구성하기 위해 다음의 몇 가지 사항을 가정한다. ① M/M/1/K 시스템을 가진 두 개의 서버가 존재한다. ② 서버당 2대의 장비를 운영한다. ③ 장비를 이용하려는 고객은 서버 1의 경우 도착률이  $\lambda_1$ 인 포아송 과정으로 도착하고 서버 2의 경우 도착률이  $\lambda_2$ 인 포아송 과정으로 도착한다. ④ 도착 고객에 대한 서버의 서비스

는 서버 1은 서비스율이  $\mu_1$ , 서버 2는 서비스율이  $\mu_2$ 인 지수분포를 따른다. ⑤ 한 서버의 장비가 모두 운용 중일 경우에 도착이 발생하면 다른 서버에 풀링을 요청한다. ⑥ 다른 서버의 풀링 요청을 수락하면 신뢰수준이 상승하여 다음에 풀링을 요청할 때 상대방이 수락할 가능성이 증가한다. ⑦ 다른 서버의 풀링 요청을 거절하면 신뢰수준이 하락하여 다음에 풀링을 요청할 때 상대방이 수락할 가능성이 감소한다.

### 2.2 M/M/1/K 시스템 간 풀링 모형

신뢰수준을 고려한 M/M/1/K 시스템 간 풀링 모형에서 사용한 상태(State)의 정의는 <표 1>과 같다.

<표 1> M/M/1/K 풀링 시스템 상태(State) 정의

구 분	상 태 ( $k_1, k_2, c_1, c_2$ )
$k_i$	서버 $i$ 의 운용 중인 장비의 수 $k_i = (0, 1, 2) \quad (0 \leq k_i \leq K)$
$c_i$	서버 $i$ 의 신뢰수준 $c_i = (0, 1)$

예를 들어 서버 1이 운용 중인 장비의 수는 2대, 서버 2가 운용 중인 장비의 수는 1대이고 서버 1의 신뢰수준이 1이며 서버2의 신뢰수준이 0이면 시스템 상태( $k_1, k_2, c_1, c_2$ )는  $(2, 1, 1, 0)$ 으로 나타낸다. 여기서 서버 2가 서비스 완료하면  $(2, 0, 1, 0)$  상태가 되며, 만약 서버 2가 서버 1의 풀링 요청을 수락하여 장비 1대를 운용하게 되면  $(2, 2, 1, 1)$  상태로 전이된다. 이러한 상태 간의 상태전이 규칙은 <표 2>와 같다.

<표 2> M/M/1/K 풀링 시스템 상태전이규칙

구 분	To	Rate	비고
고객 도착	$(k_1 + 1, k_2, c_1, c_2)$	$\lambda_1$	$0 \leq k_1 < K$
	$(k_1, k_2 + 1, c_1, c_2)$	$\lambda_2$	$0 \leq k_2 < K$
고객 서비스	$(k_1 - 1, k_2, c_1, c_2)$	$\mu_1$	$0 \leq k_1 < K$
	$(k_1, k_2 - 1, c_1, c_2)$	$\mu_2$	$0 \leq k_2 < K$
풀링 (수용)	$(k_1, k_2 + 1, c_1, c_2 + 1)$	$\lambda_1 p_{1j}$	$k_1 = K$ $0 \leq k_2 < K$
	$(k_1 + 1, k_2, c_1 + 1, c_2)$	$\lambda_2 p_{2j}$	$k_2 = K$ $0 \leq k_1 < K$
풀링 (차단)	$(k_1, k_2, c_1, c_2 - 1)$	$\lambda_1 (1 - p_{1j})$	$k_1 = K$ $0 \leq k_2 < K$
	$(k_1, k_2, c_1 - 1, c_2)$	$\lambda_2 (1 - p_{2j})$	$k_2 = K$ $0 \leq k_1 < K$

위와 같은 상태 전이율과 상태 전이규칙을 갖는 전이율 행렬(Q)을 구성하고 아래 식 (1)을 만족시키는  $\pi$ 를 구하면 안정상태 확률을 구할 수 있다.

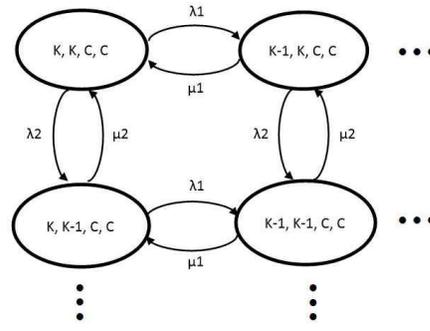
$$\pi Q = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1 \quad (1)$$

전이율 행렬(Q)을 구성한 것과 같이 전이 행렬(P)을 구성하고 아래 식 (2)을 만족시키는  $\pi$ 를 구하고 Chapman-Kolmogorov equation을 이용해 안정상태 확률을 구할 수 있다. 이산시간 마코프체인의 전이확률은 <표 3>과 같이 전이율의 단위시간 배수로 시간당 확률을 가지는 파라미터를 생성하고 단위시간마다 한 상태에서 다른 상태로 전이할 때 발생할 수 있는 모든 확률을 고려하여 <그림 1>과 같이 구할 수 있다.

$$\pi P = \pi, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1 \quad (2)$$

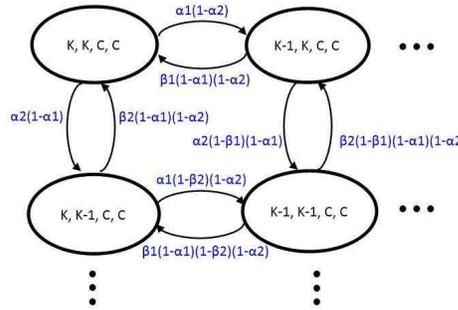
<표 3> 전이확률 파라미터 생성

전이율	단위시간		전이확률 파라미터
	분	초	
$\lambda_1$	분	1/60	$\alpha_{11}$
	초	1/3600	$\alpha_{12}$
	1/60초	1/216000	$\alpha_{13}$
$\lambda_2$	분	1/60	$\alpha_{21}$
	초	1/3600	$\alpha_{22}$
	1/60초	1/216000	$\alpha_{23}$
$\mu_1$	분	1/60	$\beta_{11}$
	초	1/3600	$\beta_{12}$
	1/60초	1/216000	$\beta_{13}$
$\mu_2$	분	1/60	$\beta_{21}$
	초	1/3600	$\beta_{22}$
	1/60초	1/216000	$\beta_{23}$



CTMC 전이 다이어그램

<그림 1>



DTMC 전이 다이어그램

### 2.3 연속시간 마코프체인 모형과 이산시간 마코프체인 모형의 안정상태확률 비교

#### 2.3.1 이론적 비교

확률과정에서 확률변수의 통합적 이해에 관한 논의는 예전부터 심도있게 이루어져 왔다. 채경철(2020)의 문헌에서 포아송 과정은 성공확률이  $\lambda dt$ 이고 시행 간격이  $dt$ 인 베르누이 과정을 밝힘으로써 이산확률변수와 연속확률변수 관계의 근간을 규명하였고 Yoon et al.(2003)은 확률밀도함수와 확률질량함수를 스틸체스 적분법으로 구분구적한 면적의 합을 이용하여 이산확률분포에 대응되는 연속확률분포를 구하는 방법을 제시하였다. 이에 따르면 같은 확률 현상에 대해 연속시간 마코프체인과 이산시간 마코프체인으로 구한 결과는 필연적으로 근사할 수밖에 없을 것이다.

본 연구에서 연속시간 마코프체인과 이산시간 마코프체인은 같은 현상에 대해 데이터를 어떻게 관찰 및 수집하였는지에 차이가 있다. 연속시간 마코프체인의 경우 특정시간  $t$  동안 발생한 사건의 수를 전이율로 표현한 것이고 이산시간 마코프체인의 경우 일정기간  $n$  슬롯동안 발생한 사건의 수를 전이확률로 나타낸 것

이다. 연속시간 확률변수와 이산시간 확률변수의 차이는 근본적으로 동일한 현상에 대해서 시간을 연속적 또는 단절적으로 인식한 것에서 기인한다. Yoon(2009)

전이율 행렬  $Q$ 를 가지는 연속시간 마코프체인의  $t$  시간 후의 전이확률과 전이확률행렬  $P$ 를 가지는 이산시간 마코프체인의  $n$ 회 후의 전이확률이 같을 경우 식 (3)을 풀이해보면 행렬지수의 정의에 따라 식 (4)와 같이 전개되고 일반화하여 정리하면 식 (5)가 성립한다. 이호우(2006), Yoon(2008)

$$P^{(n)} = e^{(Q)} \quad (3)$$

$$e^{(Q)} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(Qt)^x}{x!} \quad (4)$$

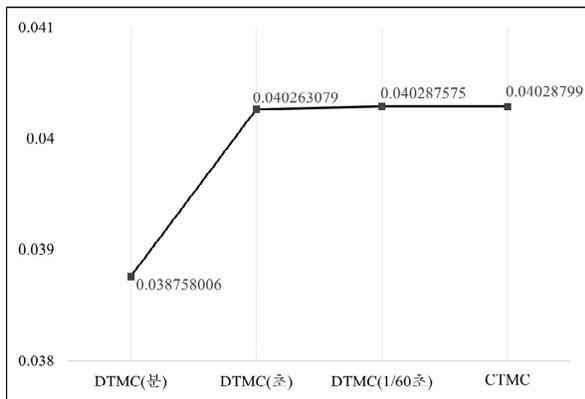
$$= I + Qt + \frac{(Qt)^2}{2!} + \dots$$

$$P = I + Q \quad (5)$$

식 (5)를 통해서 이산시간 마코프체인의 전이확률 행렬  $P$ 와 연속시간 마코프체인의 전이율 행렬  $Q$ 는 서로 변환 가능하다. 이 변환으로 구해진 전이확률 행렬과 전이율 행렬의 각 안정상태확률은 서로 동일하다. 윤봉규(2020)

### 2.3.2 연속/이산 모델 간 비교

전이율과 단위시간을 이용해 생성한 전이확률 파라미터로 이산시간 마코프체인의 안정상태확률을 구하는 경우 시간 단위에 따라 안정상태확률에 매우 근소한 차이가 발생한다.



<그림 2> 파라미터 단위시간별 안정상태확률 비교

<그림 2>에서 확인할 수 있듯이 연속시간 마코프

체인에 가장 근사한 안정상태확률을 보이는 시간 단위는 1/60초이다. 분 단위보다 초 단위가 근사한 값을 갖고 초 단위보다 1/60초 단위가 연속시간 마코프체인의 안정상태확률 값과 더욱 근사한 값을 갖는다는 것을 확인할 수 있다. 이는 이산시간 마코프체인의 전이확률 파라미터의 시간 단위를 매우 잘게 쪼갤수록 연속시간 마코프체인과 근사해진다는 것을 의미한다. 연속시간 모델과 이산시간 모델을 비교한 결과와 동일하다고 볼 수 있다면 이산시간 모델의 결과를 연속시간 모델에서 그대로 유도할 수 있다.

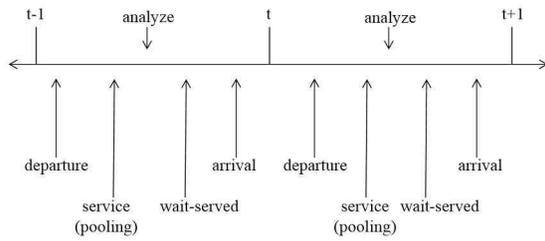
## III. Agent-Based M&S를 이용한 모형 타당성 확인

### 3.1 Agent-Based M&S의 의의

행위자 기반 모델(ABM)은 모델 안의 에이전트와 에이전트가 속해있는 환경 등 다양한 요소가 상호작용하는 것을 모델링 및 시뮬레이션(M&S)을 할 수 있는 유용한 방법이다. Wilensky et al.(2005)는 행위자 기반 모델은 확률적 불확실성을 내포하고 있는 현상을 모델로 구성하기 적절하며 창발현상으로 인한 미지의 결과가 나타날 수도 있으므로 그러한 특성을 가지는 시스템의 에이전트의 활동 규칙이나 환경적 요인으로 설명할 수 없는 상황을 표현할 수 있다. 더불어 Add-On approach로 모델 내 환경을 상황에 맞게 현실적으로 표현할 수 있어 다양한 상황을 구성하기 용이하다는 점이 큰 장점이다.

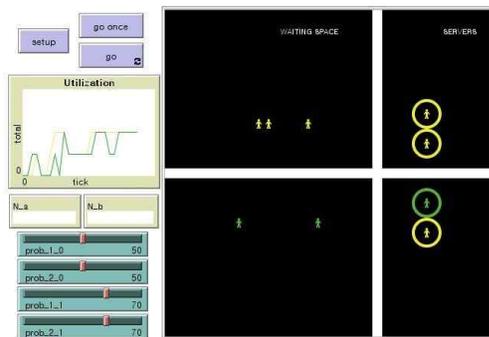
### 3.2 RNetlogo 시뮬레이션 모델링

본 연구에서는 이산사건 시뮬레이션을 수행하기 위해 RNetlogo를 이용하여 M/M/1/K 대기행렬 모형을 구성한다. 대기행렬 모형을 최대한 구현하기 위해 이산시간 대기행렬 모형의 방법론인 LAS-DA(Late Arrival System-Delayed Access) 방법을 사용하여 <그림 3>과 같은 형태로 시간(tick)의 흐름에 따라 이벤트를 발생시킨다.



<그림 3> RNetlogo 시뮬레이션 이벤트 발생 순서

위와 같이 만든 기본 모형에 풀링의 수용 및 차단으로 발생하는 신뢰수준을 추가하여 행태주의적 요소를 투사한 현실에 가까운 모델을 수립한다.



<그림 4> RNetlogo 시뮬레이션 화면

### 3.3 수치해석적 결과와 시뮬레이션 결과 비교

연속시간 마코프체인과 이산시간 마코프체인을 모델링한 것이 타당한지 확인하기 위해 RNetlogo를 활용하여 시뮬레이션을 수행하였다. 시뮬레이션은 10000 tick씩 30번 반복실험을 하였으며 시뮬레이션 결과는 <표 3>에 제시되어 있다. <표 3>의 유의확률(p-value)는 안정상태확률과 시뮬레이션 결과가 동일하다고 할 수 있는지 t-test를 실시한 결과이다. 이산시간 마코프체인으로 분석한 안정상태확률이 시뮬레이션 결과와 일치함을 보였다.

<표 3> M/M/1/K 풀링 시스템 안정상태확률

운용장비 대수( $l$ )	안정상태확률 ( $\pi_{l..}$ )	시뮬레이션	p-value
0	0.245601	0.250129	0.6081
1	0.295049	0.300195	0.7445
2	0.256118	0.261153	0.5242
3	0.136299	0.119396	0.6287
4	0.066934	0.069127	0.7163

## IV. 향후 연구

지금까지 본 연구에서 제시한 바를 통해 연속시간 모델과 이산시간 모델의 안정상태확률 값이 매우 근사하였고 이를 바탕으로 이산사건 시뮬레이션을 구현 후 그 결과가 연속시간 모델과 이산시간 모델을 비교한 결과와 동일하다고 볼 수 있다면 그 시뮬레이션의 확장도 유효할 것이다. 수치해석적 방법과 비교해 시뮬레이션은 복잡한 현실 상황을 표현하기 적합하다. 본 연구에서 사용한 모델을 확장하면 M/M/1/K 시스템 간 풀링 모형의 도착과 서비스 분포를 다른 여러 가지 분포로 적용할 수 있고 서버 수도 비교적 수월하게 증가시킬 수 있다. 또한 Agent-Based M&S의 특성을 활용하여 행태적 요소를 가미하거나 각 Agent마다 가지는 속성값을 지정하여 이동할 때 드는 비용 또는 시간을 고려한 효과 등 다양한 상황에서 Capacity Pooling의 효과를 분석할 수 있을 것이다.

## 참고문헌

김흥섭, 김경수(2018), "협력규칙에 따른 능력공유 시스템 성능분석 모형." 대한산업공학회지, 44.5:368-377.

남윤진, 윤봉규(2012), "게임상황하에서 Capacity Pooling 효과에 관한 연구," 산업공학25.4:431-440.

배태호, 김성규, 윤봉규(2008), "Queueing 모형을 활용한 Capacity Pooling의 효과분석," 한국 SCM 학회지 8.2:41-51.

윤봉규(2020), "에이전트 기반 M&S를 활용한 군수성과 분석방안 연구," 군사과학정책연구 13, 1-62.

윤봉규(2010), "마코비안 도착과정의 국방 모델링 분야 활용방안 연구," 국가안전보장문제연구소 안보연구 시리즈, Vol.11(21) 3-46.

윤봉규(2009), "전장 모델링을 위한 확률분포의 통합적 이해," 국방과학기술, Vol.2(2), 122-135.

이호우(2006), 대기행렬이론, 제3판, 서울: 시그마프레스.

차건호, 윤봉규(2008), "Capacity Pooling을 활용한 육군 항공 통신장비의 적정예비품수 결정에 관한 연구," 로지스틱스 연구, Vol.16, no.1, p.97-113

- 채경철(2020), *채 교수의 확률모형 강의*, 서울: 좋은땅
- 채경철(2004), *채 교수의 큐잉 특강, 확률모형 연구실*
- Benjaafar, S., Cooper, W., and Kim, J.S.(2005), "On the Benefits of Pooling in Product-Inventory Systems, *Management Science*, Vol.51, No.4, P.548-565
- Cachon, G. and Terwiesch, C.(2018), *Maching Supply with Demand: An introduction to Operations Management*, 4th ed, New York: Mcgraw-Hill
- Heidergott B. and Hordijk A.(2003), "Taylor Series Expansions for Stationary Markov Chains," *Advances in Applied Probability*, Vol.35, No.4, P.1046-1070
- Ross, S.M.(2015), *Introduction to Probability Models*, Elsevier 11th ed., New York.
- Simchi-Levi, D., Kaminsky, P., and Simchi-Levi, E.(2003), *Designing and Managing the Supply Chain: Concepts, Strategies, and Case Studies*, 3<sup>rd</sup> ed, New York: Mcgraw-Hill
- Wilensky, U., Rand, W.(2015), "An Introduction to Agent-Based Modeling: Modeling natural, social, and engineered complex systems with NetLogo, MIT Press
- Yoon, B.K. and Chae, K.C.(2003), "An Invariance in the Priority Queue with Generalized Server Vacations and Structured Batch Arrivals," *Stochastic Analysis and Applications*, Vol.21, No.4, P.917-933